Topologie II

aus einer Mitschrift von Maikel Hajiabadi hervorgegangen

Skriptum zur Vorlesung von Prof. Dr. D. van Straten, gehalten in Mainz, SS 2018

4.4 Das universelle Koeffiziententheorem

Wiederholung
Für den nächsten Satz müssen wir uns zunächst ein paar Begriffe ins Gedächtnis rufen.

i) Eine kurze exakte Sequenz $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ von R-Moduln heißt **spaltend**, falls eine **Spaltung** $\boldsymbol{s : C \to B}$ (Homomorphismus) existiert, sodass $\boldsymbol{\pi \circ s = id_C} \rightsquigarrow B \cong A \oplus C$
Bsp: Die folgende exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ ist exakt, jedoch $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, also **nicht spaltend**
Analog erkennt man, dass $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ nicht spaltend sein kann.

ii) Sei $f : X \to Y$ stetige Abbildung, so heißt f für den kommenden Fall **natürlich**, falls folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_p(X) \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "f_* \otimes id_G"] & H_p(X,G) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & Tor(H_{p-1}(X),G) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_p(Y) \otimes G \arrow[r] & H_p(Y,G) \arrow[r] & Tor(H_{p-1}(Y),G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Warnung: Es existiert keine natürliche Spaltung dieser Sequenzen, z.B. für den Fall $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to S^2$ „Kollabieren des 1-Skellets von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$“, diese Sequenz spaltet zwar, ist jedoch nicht natürlich! (siehe weiter unten)

Nun können wir folgendes Theorem formulieren:

Theorem („Universelles Koeffiziententheorem“)
Seien X ein topologischer Raum, G eine abelsche Gruppe
$\Rightarrow$ es existieren natürliche, spaltende, kurze exakte Sequenzen von abelschen Gruppen, welche folgende Gestalt besitzen

i) Homologie: $0 \to H_p(X) \otimes G \to H_p(X,G) \to Tor(H_{p-1}(X),G) \to 0$

ii) Cohomologie: $0 \to Ext(H_{p-1}(X),G) \to H^p(X,G) \to Hom(H_p(X),G) \to 0$

Insbesondere gelten also:

1. $H_p(X,G) \cong H_p(X) \otimes G \oplus Tor(H_{p-1}(X),G)$
2. $H^p(X,G) \cong Hom(H_p(X),G) \oplus Ext(H_{p-1}(X),G)$

Dieses Theorem folgt direkt aus einem allgemeineren abstrakten Satz über freie Kettenkomplexe und der Tatsache, dass man jede abelsche Gruppe als $\mathbb{Z}$- Modul auffassen kann:

Theorem
Seien R HIR, $(C_\circ, \delta_\circ)$ Kettenkomplex über R mit C_i freien R-Moduln, N R-Moduln
$\Rightarrow \exists$ spaltende kurze exakte Sequenzen
$0 \to H_p(C_\circ) \otimes N \to H_p(C_\circ, N) \to Tor(H_{p-1}(C_\circ), N) \to 0$
$0 \to Ext(H_{p-1}(C_\circ), N) \to H^p(C_\circ, N) \to Hom(H_p(C_\circ), N) \to 0$

Bemerkung (Zu Tor und Ext)
Sei R HIR, d.h. $\forall I \subseteq R$ Ideal gilt: $\exists a \in R : I = (a) \cong R$
Oder allgemeiner: $N \subset F, F$ freier R-Modul $\Rightarrow N$ frei
Sei nun M ein R-Modul, so versteht man unter einer **Präsentation** von M eine k.e.S.
$\boldsymbol{0 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0}$, wobei F_0, F_1 freie R-Moduln sind.
Eine Wahl von Erzeugern $m_i \in M, i \in I$ liefert stets eine surjektive Abbildung
$F_0 := \bigoplus\limits_{i \in I} Re_i \underset{e_i \mapsto m_i}{\twoheadrightarrow} M$
Als **Beispiel** betrachten wir folgende Situation:
Sei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}$-Modul, also $R = \mathbb{Z}$, so liefert folgende k.e.S. eine Präsentation von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (n) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n\cdot"] \arrow[u, "1 \mapsto n"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

Lemma
Seien $\quad 0 \to F_1 \xrightarrow{i} F_0 \to M \to 0$ Präsentation von M $\quad , \varphi : M \to M'$ Homom., dann:
$\quad 0 \to F_1' \xrightarrow{i'} F_0' \to M' \to 0$ Präsentation von M'

i) $\exists \varphi_0 : F_0 \to F_0', \varphi_1 : F_1 \to F_1'$ Homom.: $\varphi_0 \circ i = i' \circ \varphi_1$

ii) Seien $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1$ zwei weitere solcher Homom.
$\Rightarrow \exists \alpha : F_0 \to F_1' : \tilde{\varphi}_0 - \varphi_0 = i' \circ \alpha$ und $\tilde{\varphi}_1 - \varphi_1 = \alpha \circ i$

Wir erhalten also folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, dotted, "\exists \varphi_1, \tilde{\varphi}_1"'] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists \varphi_0, \tilde{\varphi}_0"] \arrow[dl, dotted, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1' \arrow[r, "i'"] & F_0' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Der Beweis an des Lemmas bleibt dem Leser überlassen.

Bemerkung
„Das Tensorprodukt ist **rechtsexakt**“, d.h.
Sei R Ring, $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ kurze exakte Sequenz von R-Moduln und N ein weiterer R-Modul, dann ist die induzierte Sequenz
$A \otimes_R N \xrightarrow{i \otimes id_N} B \otimes_R N \xrightarrow{p \otimes id_N} C \otimes_R N \to 0$ exakt
(Ist N frei, so gilt sogar $0 \to A \otimes_R N \xrightarrow{i \otimes id_N} B \otimes_R N \xrightarrow{p \otimes id_N} C \otimes_R N \to 0$ exakt)
Analog gilt „Hom ist **linksexakt**“, kurz:
R Ring, $0 \to A \to B \to C \to 0$ exakt, N R-Modul
$\Rightarrow 0 \to Hom_R(C, N) \to Hom_R(B, N) \to Hom_R(A, N)$ exakt

Definition (von $Tor^R(M, N)$ & $Ext_R(M, N)$)
Wähle zunächst eine Präsentation $0 \to F_1 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{\pi} M \to 0$ von M
$\Rightarrow$ N.B.: $0 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ exakt
definiere:
$Tor(M, N) := ker(F_1 \otimes N \xrightarrow{i \otimes id_N} F_0 \otimes N)$
Es gilt $coker(F_1 \otimes N \xrightarrow{i \otimes id_N} F_0 \otimes N) = M \otimes_R N$
,
$0 \to Tor(M, N) \to F_1 \otimes N \xrightarrow{i \otimes id_N} F_0 \otimes N \to M \otimes_R N \to 0$ exakt
Entsprechend definiert man $Ext(M, N) := coker(Hom(F_0, N) \to Hom(F_1, N))$

Folglich erhält man also:

Bemerkung

i) $0 \to Hom_R(M, N) \to Hom_R(F_0, N) \to Hom_R(F_1, N) \to Ext(M, N) \to 0$ ist exakt

ii) Tor und Ext sind wohldefiniert:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, dotted, "\varphi_1"'] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_0"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ 0 \arrow[r] & F_1' \arrow[r, "i'"] & F_0' \arrow[r] & M' \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} Tor(M,N) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & F_1 \otimes N \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_1 \otimes id_N"'] & F_0 \otimes N \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_0 \otimes id_N"] & M \otimes N \arrow[d, "\varphi \otimes id_N"] \\ Tor(M',N) \arrow[r] & F_1' \otimes N \arrow[r] & F_0' \otimes N \arrow[r] & M' \otimes N \end{tikzcd}$$

Für alternative Wahl $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1$ $\exists \alpha : F_0 \to F_1'$, sodass $\tilde{\varphi}_0 - \varphi_0 = i' \circ \alpha, \tilde{\varphi}_1 - \varphi_1 = \alpha \circ i$
$\Rightarrow$ Die induzierte Abbildung $Tor(M, N) \to Tor(M', N)$ ist unabhängig von der Wahl von φ.
Analoge Überlegungen mache man sich für Ext., folglich kommutiert:

$$\begin{tikzcd} Hom(M,N) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & Hom(F_0,N) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_0^*"] & Hom(F_1,N) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_1^*"] & Ext(M,N) \arrow[d, "\varphi^*"] \\ Hom(M,N') \arrow[r] & Hom(F_0,N') \arrow[r] & Hom(F_1,N) \arrow[r] & Ext(M,N') \end{tikzcd}$$

Beispiele

i) Der Funktor Tor: $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \Rightarrow Tor(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, N)$

$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ exakt

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \arrow[d, equal] \\ N \arrow[r, "2\cdot"] & N \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow Tor(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, N) = ker(N \xrightarrow{2\cdot} N) =, coker(N \xrightarrow{2\cdot} N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N$

Ist nun auch $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\Rightarrow Tor(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $coker(N \xrightarrow{2\cdot} N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

ii) Zu $Tor(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, N)$: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n\cdot} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ exakt

$Tor(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, N) = ker(N \xrightarrow{n\cdot} N), coker(N \xrightarrow{n\cdot} N) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N$

Sei nun auch $N = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$N = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{n\cdot} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$\Rightarrow coker = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(n,m)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/ggT(n,m)\mathbb{Z}$

$Tor(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = ker(N \to N) \cong \mathbb{Z}/ggT(n,m)$ (Übung!)

iii) $Tor(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0$ ($\mathbb{Q} \xrightarrow{n\cdot} \mathbb{Q}$ nur 0 auf 0), $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$

iv) $Ext(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}$, dies liefert also eine algebraische Einführung der reellen Zahlen

v) $M \otimes N$ ist Kokern derselben Abbildung von der $Tor(M, N)$ Kern ist!